Leçon 159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).
Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Le lien avec la résolution des systèmes linéaires doit être fait.
Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.
Pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions, il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X.u$ pour tout vecteur u.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 159 intitulée "Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.". La dualité et les formes linéaires trouvent de nombreuses applications en mathématiques au travers de beaucoup de domaines tels que le calcul différentiel, l'orthogonalité ou encore le bidual. L'objectif de cette leçon est donc d'introduire des résultats concernant les formes linéaires ainsi que les espaces duaux et l'orthogonalité puis d'en donner quelques applications.
On commence tout d'abord dans une première partie à parler de formes linéaires et d'espace dual avec en premier lieu des généralités sur les formes linéaires et les hyperplans. On donne ainsi la définition d'une forme linéaire et des formes linéaires coordonnées qui nous serons très utiles dans la suite de cette partie lorsque nous parlerons d'espace dual et on donne les premiers exemple de formes linéaires (coordonnées). On énonce ensuite la proposition 8 qui nous permet d'introduire la notion d'hyperplan vectoriel duquel on en déduit quelques résultats notamment concernant les dimensions. En deuxième lieu on parle d'espace dual et de base duale en commençant par en donner la définition avec la définition 17 et le théorème 18 et on donne ensuite deux exemples où l'on exhibe des bases duales ainsi que quelques résultats sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une fois que l'on s'est intéressé au dual d'un espace vectoriel, rien n'empêche de s'intéresser au dual du dual, que l'on appelle bidual et qui fait l'objet d'un troisième point. On montre alors que le bidual est isomorphe à l'espace de départ en dimension finie et c'est ça qui justifie son importance car on peut en déduire des résultats dans le cas où les espaces sont réflexifs par exemple. On montre enfin qu'il existe une base antéduale et qu'on la calculera un peu plus tard au moyen de l'orthogonalité.
Dans une deuxième partie on parle d'orthogonalité au sens de la dualité en commençant par en donner les généralités. On donne ainsi la définition d'éléments orthogonaux et d'orthogonal, puis l'on regarde comment se comporte l'orthogonalité vis-à-vis des inclus d'espaces et des dimensions. On termine ce premier point en faisant un retour sur les hyperplans ainsi que les formes linéaires. Dans un deuxième point, on introduit la notion de transposée d'une application linéaire et l'on en donne des propriétés générales notamment au niveau du rang et du noyau et on termine cette partie en déterminant une base antéduale grâce à la transposée.
Enfin dans une dernière partie, on s'intéresse cette fois-ci aux applications des formes linéaires et de la dualité. On commence tout d'abord avec le formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie où le résultat central à retenir est l'algorithme de Gauss qui conduit à la loi d'inertie de Sylvester qui permet d'écrire toute forme quadratique comme différence de sommes de carrés de formes linéaires. On donne une deuxième application en algèbre où l'on s'intéresse au quotient d'espaces vectoriels. L'idée de cette sous-partie est de montrer que le quotient peut-être muni d'une structure d'espace vectoriel et de montrer qu'il est isomorphe à un supplémentaire de l'espace par lequel on quotiente. Cette situation est la même que dans le cas des groupes (structure du quotient, théorème de factorisation, premier théorème d'isomorphisme), ce qui n'est pas très étonnant car les espaces vectoriels ne sont rien d'autre que des

groupes abéliens avec une loi de composition externe supplémentaire ! Finalement, on termine cette leçon avec une application au calcul différentiel où l'on parle de la différentielle d'une fonction qui est une forme linéaire dans le cas d'une fonction f différentiable et à valeurs réelles ainsi que du théorème des extrema liés et deux applications.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Formes linéaires et espace dual

I.1 Généralités sur les formes linéaires et les hyperplans

Définition 1 : Forme linéaire [Deschamps, p.1064] :
On appelle **forme linéaire** tout application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple 2 : [Deschamps, p.1064]
$*$ Si $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, l'application $(x, y) \longmapsto ax + by$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$.
$*$ Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'application $f \longmapsto \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$.
$*$ Pour $a \in \mathbb{K}$, l'application $P \longmapsto P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$

Proposition 3 : [Deschamps, p.1064]
Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, alors $\varphi = 0$ ou φ est surjective.

Définition 4 : Forme linéaire coordonnée [Deschamps, p.1064] :
On considère $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.
Pour chaque $i \in I$, on note e_i^* l'unique forme linéaire sur E telle que pour tout $j \in I$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. On appelle cette forme linéaire **forme linéaire coordonnée d'indice i relative à la base $(e_i)_{i\in I}$.**

Exemple 5 : [Deschamps, p.1065]
Si l'on utilise la base canonique $e = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{K}^n$, alors pour tout vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a $e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^n x_k e_k\right) = x_i$.

Proposition 6 : [Deschamps, p.1065]
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.
Pour tout $i \in I$, la forme linéaire coordonnée e_i^* associe à tout vecteur de E sa composante d'indice i dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Exemple 7 : [Deschamps, p.1065]
Si l'on munit l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ de sa base canonique, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a $e_i^*(P) = a_i$.

Proposition 8 : [Deschamps, p.1065]
Soit H un sous-espace vectoriel de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ Il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.
$*$ Il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Définition 9 : Hyperplan vectoriel [Deschamps, p.1065] :
On appelle **hyperplan vectoriel de** E tout sous-espace vectoriel H de E vérifiant l'une des deux assertions équivalentes de la proposition précédente.

Exemple 10 : [Deschamps, p.1065]
$*$ Dans $\mathbb{R}^3$, le noyau de la forme linéaire non nulle $(x,y,z) \longmapsto x+y+z$ est l'hyperplan $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x+y+z=0\}$.
$*$ L'ensemble $\mathbb{R}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}$ car $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.
$*$ Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont exactement les droites vectorielles.

Corollaire 11 : [Deschamps, p.1066]
Si H est un hyperplan de E et si D est une droite vectorielle qui n'est pas incluse dans H, alors $E = H \oplus D$.

Exemple 12 : [Deschamps, p.1066]
Dans $\mathbb{R}^3$, en reprenant l'hyperplan H de l'exemple 10, on a $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathrm{Vect}((1,0,0))$ puisque $(1,0,0)$ n'appartient pas à H.

Proposition 13 : [Deschamps, p.1066]
Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles.
Si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que E est de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 14 : [Deschamps, p.1107]
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.
Une application φ de E dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire si, et seulement si, il existe $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i e_i^*$.

Proposition 15 : [Deschamps, p.1107]
Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si, et seulement si, on a l'égalité $\dim_{\mathbb{K}}(H) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - 1$.

Proposition 16 : [Deschamps, p.1109]
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $H_1, ..., H_m$ des hyperplans de E.
On a $\dim_{\mathbb{K}}\left(\bigcap_{i=1}^m H_i\right) \geq \dim_{\mathbb{K}}(E) - m$.
De plus, on a égalité si, et seulement si, la famille des formes linéaires $(\varphi_1, ..., \varphi_m)$ associées aux hyperplans est libre.

I.2 Espace dual et base duale

Dans toute cette sous-partie, on suppose que E est de dimension finie.

Définition 17 : Espace dual [Gourdon (1), p.132] :
On appelle **espace dual de** E l'ensemble des formes linéaires sur E et on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Théorème 18 : [Gourdon (1), p.133]
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.
La famille $(e_1^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^* appelée **base duale** et on a l'égalité $\dim_{\mathbb{K}}(E^*) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Remarque 19 : [Gourdon (1), p.133]
$*$ On retrouve le résultat de la proposition 14.
$*$ Si E est de dimension infinie et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, alors la famille $(e_i^*)_{i\in I}$ est une famille libre mais non génératrice de E^*.

Exemple 20 : [Gourdon (1), p.137]
On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.
La famille (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^*, avec $f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*$, $f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*$ et $f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$.

Exemple 21 : [Berhuy, p.1074]
$*$ Pour $E = \mathbb{R}_n[X]$ et e sa base canonique, en posant pour tout entier $j \in [\![0;n]\!]$, $f_j : P \longmapsto \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$, alors la base $f = (f_0, ..., f_n)$ est la base duale de e.
$*$ Pour $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels distincts, en posant pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, $f_j : P \longmapsto P(a_j)$, alors $f = (f_0, ..., f_n)$ est une base de E^* et sa base duale est $e = (L_0, ..., L_n)$ où $L_i = \prod_{j\neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$.

Développement 1 : [cf. CALDERO + FRANCINOU]

Théorème 22 : [Caldero, p.5]
L'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \longmapsto & f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ X & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AX) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans sur son dual.

Lemme 23 : [Francinou, p.41]
Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont exactement les matrices scalaires.

Corollaire 24 : [Caldero, p.5]
Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire.
Si f est telle que pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait $f(XY) = f(YX)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait $f(X) = \lambda \,\mathrm{Tr}(X)$.

Corollaire 25 : [Caldero, p.5]
Si $n \geq 2$, alors tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

I.3 Espace bidual et base antéduale

Dans toute cette sous-partie, on suppose que E est de dimension finie.

Définition 26 : Espace bidual [Gourdon (1), p.132] :
On appelle **espace bidual** l'espace dual de E^* et on le note E^{**}.

Théorème 27 : [Gourdon (1), p.133]
Pour tout $x \in E$, on note $\widetilde{x}$ l'application de E^* dans $\mathbb{K}$ définie par $\widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$.
On a $\widetilde{x} \in E^{**}$ et l'application $f : E \longmapsto E^{**}$ définie par $f(x) = \widetilde{x}$ est un isomorphisme.

Remarque 28 : [Gourdon (1), p.133]
$*$ Cet isomorphisme est canonique (il ne dépend pas du choix d'une base). On convient alors d'identifier E et E^{**} en identifiant x à $\widetilde{x}$.
$*$ En dimension infinie, l'application f est injective mais pas surjective.

Proposition 29 : [Gourdon (1), p.133]
Soit $(f_1, ..., f_n)$ une base de E^*.
Il existe une unique base $(e_1, ..., e_n)$ de E telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $e_i^* = f_i$ et on appelle cette base la **base antéduale de** $(f_1, ..., f_n)$.

Remarque 30 : [Gourdon (1), p.133]
Nous verrons plus loin (cf. II.2) des moyens de calcul de la base antéduale.

II Autour de l'orthogonalité

II.1 Notion d'orthogonalité

Définition 31 : Éléments orthogonaux et orthogonal [Gourdon (1), p.134] :
Des éléments $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dit **orthogonaux** lorsque $\varphi(x) =< \varphi, x >= 0$.
$*$ Si $A \subseteq E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* \text{ tq } \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0\}$ et on l'appelle **orthogonal de** A.
$*$ Si $B \subseteq E^*$, on note $B^\circ = \{x \in E \text{ tq } \forall \varphi \in B,\ \varphi(x) = 0\}$ et on l'appelle **orthogonal de** B.

Remarque 32 : [Gourdon (1), p.134]
Si $\varphi \in E^*$, alors $\{\varphi\}^\circ$ est le noyau de φ.

Proposition 33 : [Gourdon (1), p.134]
$*$ Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq E$, alors $A_2^\perp \subseteq A_1^\perp$. $*$ Si $B_1 \subseteq B_2 \subseteq E^*$, alors $B_2^\circ \subseteq B_1^\circ$.
$*$ Si $A \subseteq E$, alors $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$. $*$ Si $B \subseteq E^*$, alors $B^\circ = \mathrm{Vect}(B)^\circ$.

Théorème 34 : [Gourdon (1), p.134]
Si E est de dimension finie, alors :
$*$ Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(F^\perp) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ et $F^{\perp\circ} = F$.
$*$ Si G est un sous-espace vectoriel de E^*, alors $\dim_{\mathbb{K}}(G) + \dim_{\mathbb{K}}(G^\circ) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ et $G^{\circ\perp} = G$.

Remarque 35 : [Gourdon (1), p.134]
$*$ En dimension finie, un sous-espace est égal à l'espace tout entier si, et seulement si, son orthogonal est nul.
$*$ L'égalité $F^{\perp\circ} = F$ reste vraie en dimension infinie mais pas $G^{\circ\perp} = G$

Corollaire 36 : [Gourdon (1), p.134]
Si E est de dimension finie notée n, alors :
$*$ Si $\varphi_1, ..., \varphi_p$ sont p formes linéaires de E^* telles que $\mathrm{rg}(\varphi_1, ..., \varphi_p) = r$, alors le sous-espace vectoriel $F = \{x \in E \text{ tq } \forall i \in [\![1;p]\!],\ \varphi_i(x) = 0\}$ est de dimension $n-r$.
$*$ Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-r$, alors il existe r formes linéairement indépendantes $\varphi_1, ..., \varphi_r$ de E^* telles que l'on ait $F = \{x \in E \text{ tq } \forall i \in [\![1;p]\!],\ \varphi_i(x) = 0\}$

Proposition 37 : [Gourdon (1), p.135]
Soient A_1 et A_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Si E est de dimension finie, alors :

$$(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp \text{ et } (A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$$

De même, si B_1 et B_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E^*, alors :

$$(B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ \text{ et } (B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$$

Proposition 38 : [Gourdon (1), p.135]
Soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire non nulle.
$*$ $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.
$*$ Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 39 : [Gourdon (1), p.135]
Si H un hyperplan de E, alors l'ensemble $H^\perp$ des formes linéaires sur E qui s'annulent sur H est une droite de E^*.

II.2 Transposée d'une application linéaire

Dans toute cette partie, on considère F et G deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension quelconque.

Définition 40 : Transposée d'une application linéaire [Gourdon (1), p.135] :
On considère $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Pour tout $f \in F^*$, on a $f \circ u \in E^*$ et l'application linéaire définie de F^* sur E^* par $f \longmapsto f \circ u$ est appelée **application transposée de** u et notée $u^\intercal$.

Proposition 41 : [Gourdon (1), p.135]
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
$*$ Si E et F sont de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^\intercal)$ et $\mathrm{Im}(u^\intercal) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.
$*$ Si E et F sont de dimension quelconque, alors $\mathrm{Ker}(u^\intercal) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.

Proposition 42 : [Gourdon (1), p.136]
Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.
On a $(v \circ u)^\intercal = u^\intercal \circ v^\intercal$.

Proposition 43 : [Gourdon (1), p.136]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si E est de dimension finie, alors un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par $u^\intercal$.

Remarque 44 : [Gourdon (1), p.136]
Ce résultat est encore vrai en dimension infinie mais fait appel à l'axiome du choix.

On suppose jusqu'à la fin de cette sous-partie que E est de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ sa base duale. On se pose la question suivante : Quelle est dans la base $\mathcal{B}^*$ les coordonnées de la base duale $\mathcal{B}'^*$ d'une nouvelle base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de E ?

Proposition 45 : [Gourdon (1), p.136]
Avec les notations ci-dessus, la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ est $(C^{-1})^\intercal$ (avec C la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).

Exemple 46 : [Gourdon (1), p.137]
Avec l'exemple 20, la matrice de passage de (e_1^*, e_2^*, e_3^*) à (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est $(C^{-1})^\intercal$ avec C la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (f_1, f_2, f_3). On a donc :

$$C = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right)^\intercal = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

III Applications

III.1 Formes quadratiques sur $\mathbb{R}$

Dans toute cette sous-partie, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et on considère q une forme quadratique sur E.

Développement 2 : [cf. ROMBALDI]

Théorème 47 : [Rombaldi, p.468]
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
$*$ On a $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) \geq \dim(E)$ avec égalité lorsque q est non dégénérée.
$*$ On a $E = F \oplus F^{\perp}$ si, et seulement si, $q|_F$ est non dégénérée.

Théorème 48 : [Rombaldi, p.476]
Il existe un unique couple (s,t) d'entiers naturels tels que pour toute base q-orthogonale $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E on a $s = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } q(e_i) > 0\})$ et $t = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } q(e_i) < 0\})$.
De plus, on a la relation $s + t = \mathrm{rg}(q)$.

Théorème 49 : [Rombaldi, p.477]
Si l'on définit les ensembles $\mathcal{P} = \{F \text{ s.e.v. tq } q|_F \text{ définie positive}\}$ ainsi que $\mathcal{N} = \{F \text{ s.e.v. tq } q|_F \text{ définie négative}\}$, alors la signature (s,t) de q est donnée par :

$$s = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{P}} \dim(F) \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } t = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{N}} \dim(F) \text{ sinon} \end{cases}$$

Théorème 50 : Théorème d'inertie de Sylvester [Rombaldi, p.477]
Si q est de signature (s,t), alors il existe $\ell_1, ..., \ell_{s+t}$ des formes linéaires indépendantes telles que $q = \sum_{i=1}^{s} \ell_i^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} \ell_j^2$ et il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est $D = \mathrm{diag}(I_s, I_t, 0)$.

Exemple 51 : [Rombaldi, p.485]
On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par la relation suivante : $q(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2(xy + xz + yz)$.
On a alors $q(x,y,z) = -(x-y-z)^2 + (y+z)^2 - (y-z)^2$.

III.2 Quotient d'espaces vectoriels

Dans toute cette sous-partie, on considère V un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 52 : [Berhuy, p.1061]
Le groupe quotient E/V muni de la loi externe :

$$\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E/V & \longrightarrow & E/V \\ (\lambda, \overline{x}) & \longmapsto & \lambda \cdot \overline{x} = \overline{\lambda x} \end{array} \right.$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
De plus, la projection canonique $\pi : E \longrightarrow E/V$ est linéaire.

Proposition 53 : [Berhuy, p.1061]
La projection canonique $\pi : E \longrightarrow E/V$ induit une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-espaces vectoriels V' de E contenant V et l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E/V.
Plus précisément, si V' est un sous-espace vectoriel de E contenant V, alors on a $V'/V = \pi(V') = \{\overline{v'},\ v' \in v'\}$ est un sous-espace vectoriel de E/V. Réciproquement, si W est un sous-espace vectoriel de E/V, alors $\pi^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant V, et ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre.

Théorème 54 : Théorème de factorisation [Berhuy, p.1062] :
Soient E' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E,E')$.
Si $V \subseteq \mathrm{Ker}(u)$, alors il existe une unique application linéaire $\overline{u} : E/V \longrightarrow E'$ telle que $u = \overline{u} \circ \pi$. Cette application linéaire est définie par $\overline{u}(\overline{x}) = u(x)$.
De plus, il y a un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E/V, E')$ et $\{u \in \mathcal{L}(E,E') \text{ tq } V \subseteq \mathrm{Ker}(u)\}$.

Théorème 55 : Premier théorème d'isomorphisme [Berhuy, p.1062] :
Soient E' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E,E')$.
L'application linéaire $\overline{u} : E/\mathrm{Ker}(u) \longrightarrow E'$ est injective et induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $E/\mathrm{Ker}(u) \cong \mathrm{Im}(u)$.

Remarque 56 : [Berhuy, p.1062]
On remarque que la situation est exactement la même que dans le cadre de la théorie des groupes mais avec une structure supplémentaire.

Définition 57 : Codimension d'un espace-vectoriel [Berhuy, p.1062] :
On appelle **codimension de** V la dimension de l'espace vectoriel E/V et on la note $\mathrm{codim}_{\mathbb{K}}(V)$.

Proposition 58 : [Berhuy, p.1062]
Si V' est un supplémentaire de V, alors $E/V \cong V'$.
En particulier, si E est de dimension finie, alors V est de codimension finie et on a $\mathrm{codim}_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Remarque 59 : [Berhuy, p.1063]
Cette proposition permet de donner une autre caractérisation d'un hyperplan : c'est un sous-espace de codimension 1.

III.3 Calcul différentiel

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, on considère $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de E, $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$ ainsi qu'un point $a \in \mathcal{U}$.

Définition 60 : Fonction différentiable en un point [Gourdon (2), p.323] :
On dit que f est **différentiable en** a lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\|_F}{\|h\|_E} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad (*)$$

Remarque 61 : [Gourdon (2), p.323]
$(*)$ s'écrit aussi : $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|_E)$.

Proposition 62 : [Gourdon (2), p.323 + 324]
Si f est différentiable en a, alors φ est unique et on l'appelle **différentielle de** f **en** a et on la note df_a.

Exemple 63 : [Gourdon (2), p.323 + 330]
$*$ Si f est linéaire, alors elle est différentiable en tout point de E et pour tout $a \in E$, $df_a = f$.
$*$ Si f est bilinéaire de $E \times E$ dans F, alors elle est différentiable et pour tout $(a, b) \in E^2$, $df_{(a,b)} = [(h_1, h_2) \longmapsto f(a, h_2) + f(h_1, b)]$.

Proposition 64 : [Gourdon (2), p.323]
Si f est à valeurs réelles et différentiable, alors sa différentielle est une forme linéaire.

Proposition 65 : [Gourdon (2), p.325]
Si f est différentiable en a, alors $df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_i$.

Théorème 66 : Théorème des extrema liés [Gourdon (2), p.337] :
Soient $f, g_1, ..., g_r$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'ouvert U de E et $\Gamma = \{x \in U \text{ tq } g_1(x) = ... = g_r(x) = 0\}$.
Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $c \in \Gamma$ et si $dg_{1,c}, ..., dg_{r,c}$ sont linéairement indépendants, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ (uniques et appelés **multiplicateurs de Lagrange**) tels que $df_c = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_{i,c}$.

Exemple 67 : [Gourdon (2), p.339]
Il est possible de retrouver l'inégalité arithmético-géométrique à partir du théorème des extrema liés.

Proposition 68 : [Gourdon (2), p.341]
Si l'on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2 : M \longrightarrow \left(\sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, alors le groupe des matrices orthogonales directes de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Remarques sur la leçon

— On peut également parler de recherche de sous-espaces propres, de théorèmes d'analyse (théorème de Hahn-Banach, etc.) ou de réduction de Frobenius par exemple.

— Connaître les cas classiques d'isomorphisme entre E et E^* avec le théorème de Riesz-Fisher, le cas général et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Savoir traduire en terme de dualité l'interpolation de Lagrange ainsi que la différence entre le dual algébrique (cas de la leçon) et le dual topologique (où les applications sont en plus continues) et le fait qu'ils coïncident en dimension finie.

Liste des développements possibles

— Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Loi d'inertie de Sylvester et classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.

— Serge Francinou, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, algèbre 2*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.